1

$G \leq Gl_n(\mathbb{K})$ τοπ. φραδα $\subseteq M(n, \mathbb{K})$ $\mathbb{R}$

$T_G = \{ \gamma'(0) \mid \gamma : (-c, c) \to G$ διαφ. με $\gamma(0) = I \} \leq S_x M(n, \mathbb{K}')$

$\dim G = \dim T_G$

$\dim O(n) \leq \dim so(n) = n(n-1)/2$

$\dim U(n) \leq \dim su(n) = n^2$

$\dim Sp(n) \leq \dim sp(n) = n(2n+1)$

$M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) \supseteq Gl_n(\mathbb{R})$

$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$ συγκλίνει

$\det e^A \neq 0$

$AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$

$e : so(n) \to O(n)$ $(SO(n))$ κ' $SO(n) \leq O(n)$

$AA^t = I \Rightarrow (\det A)^2 = I$

$O(n) - SO(n) \not\leq O(n)$ (ο πιο απλός λόγος, $\not\ni I$)

$O(n) = SO(n) \sqcup A\,SO(n)$ $\det A = -1$

ξένη ένωση

$\log : U \to M_n(\mathbb{R})$ U ανοιχτή "μικρή" περιοχή του I

$\log A = A - I - \frac{(A-I)^2}{2} + \frac{(A-I)^3}{3} - \dots$

Η $\log A$ σειρά συγκλίνει, άρα η απεικόνιση είναι καλά ορισμένη.

$e^0 = 1$, $\log 1 = 0$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω V ανοιχτή περιοχή του Oxn. Αν $X \in U$ και $A \in V$ τότε $e^{\log X} = X$ και $\log e^A = A$

$A \in V \Rightarrow e^A \in U \Rightarrow \underline{\log e^A = A}$ Θέλω να το αποδείξω

$\log e^A = e^A - I - \frac{(e^A - I)^2}{2} + \frac{(e^A - I)^3}{3} + \dots$

$e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots$

$$e^A - I = A\left(I + \frac{A}{2} + \frac{A^2}{3!} + \dots\right)$$

$$\log e^A = \left(A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots\right) - \underbrace{\left(A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots\right)^2 \Big/ 2}_{(1)} +$$

$$\left(A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots\right)^3 \Big/ 3 - \dots = A$$

Επαγωγικά από το (1) και μετά τα $A^2, A^3, \dots$ φεύγουν

Άρα $\log e^A = A$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $e^{\log X} = X$

Πρόταση

Έστω $X, Y \in U$ και $\log X \cdot \log Y = \log Y \cdot \log X$, τότε $\log XY = \log X + \log Y$

Απόδειξη

Λόγω της συνέχειας $X, Y \in U \Rightarrow XY \in U \Rightarrow \log XY\ \exists$.

Από την ιδιότητα $e^{\log X} = X \Rightarrow e^{\log XY} = XY =$

$e^{\log X} e^{\log Y}$, από υπόθεση, $e^{\log X + \log Y}$.

- Στις περιοχές U και V η e είναι 1-1.

Άρα $\log XY = \log X + \log Y$

Πόρισμα

Αν $X \in U$ και X ορθογώνιος, τότε $\log X \in so(n)$

Απόδειξη

$\left.\begin{array}{l} X \text{ ορθογώνιος } X \cdot X^t = X^t X = I \\ \log I = O_{n\times n} \end{array}\right\} \Rightarrow \log X X^t = O$.

$\log XX^t = \log X + \log X^t = 0 \Rightarrow \log X \in so(n)$ (αναθέτο-συμμετρικός)

Μονοπαραμετρικές Υποομάδες

Ορισμός

Μια μονοπαραμετρική υποομάδα $\gamma: \mathbb{R} \to G$ είναι ένας διαφορίσιμος ομομορφισμός ομάδων, όπου $G \leq Gl_n(\mathbb{K})$

Δηλαδή, η γ είναι μια καμπύλη στην G, με $\gamma(0) = I$ (επειδή είναι ομομορφισμός ομάδων). Είναι διαφορίσιμη και

- $\gamma(t+t') = \gamma(t)\gamma(t')$
  "$\gamma(t'+t) = \gamma(t')\gamma(t)$

Έστω U ανοικτή περιοχή του μηδενός και $a \in \mathbb{R}$, $U = (-\varepsilon, \varepsilon)$. $\forall a \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, $\exists n: -\varepsilon < \frac{a}{n} < \varepsilon$. Αν η γ έχει οριστεί στο U, τότε

είναι ορισμένη και στο $a+U$

$\gamma(a) = ;$ $\gamma\left(\frac{a}{n}\right)$ ορισμένο

$\gamma(a) = \gamma\left(n\frac{a}{n}\right) = \gamma\left(\frac{a}{n}\right)\gamma\left(\frac{a}{n}\right) \cdots \gamma\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\gamma\left(\frac{a}{n}\right)\right)^n$ και αυτό έχει οριστεί

Μια μονοπαραμετρική υποομάδα καθορίζεται αν οριστεί σε μια ανοικτή περιοχή του 0 (μηδενός).

Παράδειγμα

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ ή $\mathbb{H}$.

Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$. Ορίζουμε τη $\gamma: \mathbb{R} \to Gl_n(\mathbb{K})$ με $\gamma(t) = e^{tA}$

Η γ είναι διαφορίσιμη καμπύλη, $\gamma(0) = e^{0 \cdot A} = e^{0_{n \times n}} = I$.

$$\left.\begin{aligned} &\gamma(t+t') = e^{(t+t')A} = e^{tA + t'A} \\ &(t'A)(tA) = (tA)(t'A) = tt'A \end{aligned}\right\} \Rightarrow \gamma(t)\gamma(t')$$

Θεώρημα

Έστω γ μια μονοπαραμετρική υποομάδα στην $GL_n(\mathbb{K})$. Τότε $\exists A \in M_n(\mathbb{K})$ ώστε $\gamma(t) = e^{tA}$, $\gamma'(0) = A$

Απόδειξη

· Έστω $\sigma(t) = \log\gamma(t)$ σε μια ανοιχτή περιοχή του 0.
Η σ είναι μια καμπύλη στο $M_n(\mathbb{K})$. Από τη σχέση
$\sigma(t) = \log\gamma(t) \Rightarrow$

$$e^{\sigma(t)} = \underbrace{e^{\log\gamma(t)}}_{=\gamma(t)}$$

Η σ είναι διαφορίσιμη καμπύλη και ορίζουμε $A = \sigma'(0)$
$(\sigma(t) = \log(\gamma(t)) = \log e^{tA} = tA$ (Θέλω να το δείξω))
Αρκεί ν.δ.ο. $\sigma(t)$ γραμμική απεικόνιση
· Έστω $t \in (-c, c)$ στην ανοιχτή περιοχή

$$\sigma'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\sigma(t+h) - \sigma(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(\gamma(t+h)) - \log(\gamma(t))}{h} =$$

Όταν $\gamma(t)\gamma(h) = \gamma(h)\gamma(t)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(\gamma(t)\gamma(h)) - \log\gamma(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{\log\gamma(t)} + \log\gamma(h) - \cancel{\log\gamma(t)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\log\gamma(h)}{h}$$ Παρατηρούμε ότι η παράγωγος της σ στο t δεν εξαρτάται από το t.

$= \sigma'(0)$.

Άρα η παράγωγος της σ είναι σταθερή στο $(-\varepsilon, \varepsilon)$

· Άρα η σ είναι γραμμική και $\sigma(t) = tA$ με $A = \sigma'(t)$

Πόρισμα

Κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα της $GL_n(\mathbb{K})$ στο 0, δίνεται από κάποια μονοπαραμετρική υποομάδα. Ενώ η εικόνα του στο 0

▸ Εξετάζουμε το ίδιο για την $O_n(\mathbb{K})$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω A ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της $O_n(\mathbb{K})$. Δηλ. $A \in T_{O_n(\mathbb{K})}$.
Τότε $\exists!$ μονοπαραμετρική υποομάδα γ της $O_n(\mathbb{K})$, ώστε $A = \gamma'(0)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$A \in T_{O_n(\mathbb{K})} \Rightarrow \exists\, \sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to O_n(\mathbb{K})$ με $\sigma(0) = I$ και $\sigma'(0) = A$.

$\sigma(t) \in O_n(\mathbb{K}) \iff \sigma(t)\overline{\sigma(t)}^t = I$.

Έστω $\varphi(t) = \sigma(t)\overline{\sigma(t)}^t = I$

● Η φ είναι σταθερή, άρα $\varphi'(t) = 0$.

$\varphi'(t) = \sigma'(t)\overline{\sigma(t)}^t + \sigma(t)(\overline{\sigma(t)}^t)' = 0$ (εξ' ορισμού).

Στο 0, θα έχω $\varphi'(0) = \sigma'(0)\underbrace{\overline{\sigma(0)}^t}_{I} + \underbrace{\sigma(0)}_{I}(\overline{\sigma(0)}^t)' = 0$.

Άρα $\sigma'(0) + (\overline{\sigma(0)}^t)' = 0 \Rightarrow \sigma'(0) \in$ στην αντιθετο-συμμετρική-ερμιτιανή-συμπλεκτική ομάδα

Άρα $A + \bar{A}^t = 0$.

Από το προηγούμενο θεώρημα $\gamma(t) = e^{tA}$. Πρέπει $e^{tA} \in O_n(\mathbb{K})$

$$\gamma(t)\overline{\gamma(t)}^t = e^{tA} e^{t\bar{A}^t} = e^{tA + t\bar{A}^t} = e^{t(A+\bar{A})^t} = e^{tO_{n\times n}} = I.$$

● $A + \bar{A}^t = 0 = \bar{A}^t + A$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ εφαπτόμενων διανυσμάτων της $Gl_n(\mathbb{K})$ ($O_n(\mathbb{K})$) και μονοπαραμετρικών υποομάδων αντίστοιχα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

$\dim O(n) = \dim so(n) = n(n-1)/2$

$\dim U(n) = \dim su(n) = n^2$

$\dim Sp(n) = \dim sp(n) = n(2n+1)$

$\dim SO(n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

$SU(n) = \{A \in U(n) \mid A\bar{A}^t = I,\ \det A = 1\}$
$\dim SU(n) = n^2 - 1$

Θεώρημα
Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ή $M_n(\mathbb{C})$, τότε $e^{trA} = \det e^A \neq 0$.

Εφαρμογή
Έστω $tr : su(n) \to \mathbb{C}$. A αντιερμιτιανός πίνακας $trA \to \mathbb{C}$.
$A = (a_{ij})$, $a_{ii} = ir_i$ με $r_i \in \mathbb{R}$.

$Im\,tr \leq i\mathbb{R}$ $\forall ir$, $\exists A \in SU(n)$ με $trA = ir$
Άρα $Im\,tr = i\mathbb{R} \simeq \mathbb{R} \Rightarrow \dim Im\,tr = 1$, $su(n) = T_{U(n)}$
Από Γραμ. Άλγεβρα $su(n) \simeq Im\,tr \oplus \ker tr$.

* $T\ V^n \xrightarrow{γρ} W^m$ $\ker T \neq \{0\}$
$\ker T = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \to V^n = \langle v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k} \rangle \xrightarrow{T}$
$T(V^n) = \langle T(w_1), \dots, T(w_{n-k}) \rangle$

$V^n \simeq \ker T \oplus Im\,T$ *

Άρα από * $\dim su(n) = \dim Im\,tr \oplus \dim \ker tr \Rightarrow$
$n^2 = 1 + \dim \ker tr$
Θ.δ.ο. $\ker tr = tr^{-1}(0) \simeq T_{SU(n)}$.
Τότε $\dim SU(n) = \dim T_{SU(n)} = \dim \ker tr = n^2 - 1$.

Έστω τυχόν σημείο $C \in su(n)$ με $trC = 0$

$$\left.\begin{array}{l} e^{trC} = e^0 = 1 \overset{Θεώρ.}{\Rightarrow} \det e^C = 1. \\ \text{Αν } e^C \in U(n) \end{array}\right\} \Rightarrow e^C \in SU(n)$$

Θέλαμε $e^{C}(e^{\bar{C}})^{t} = I$ $\Big\}$ $e^{(C+\bar{C}^{t})} = e^{0_{n\times n}} = I$.
Επειδή $C + \bar{C}^{t} \underset{C\in su(n)}{=} 0 = \bar{C}^{t} + C$

Λαμβάνοντας την μονοπαραμετρική υποομάδα e^{tC} έχουμε το εφαπτόμενο διάνυσμα που ζητάμε, επειδή δείξαμε ότι είναι 1-1 και επί.